Μαθημα 2ο 12/10/2017

Διαφ. Εξ.

Πιο απλη εξισωση

$y'(t) = f(t)$, $t \in I$ εδώ έχει πολλές συναρτήσεις που διαφέρουν κατά σταθερά c

Αντιπαραγωγιση $y(t) = \int f(t)\,dt + c$

Π.χ

1) $y'(t) = t^2 \Rightarrow y(t) = \int t^2\,dt + c \Rightarrow y(t) = \frac{t^3}{3} + c$ γενική λυση

2) $y'(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ και επιπλεον $y(2) = 7$ (εχω μια λυση)

$y(t) = \frac{t^3}{3} + c \xrightarrow{y(2)=7} \frac{8}{3} + c = 7 \Rightarrow c = 7 - \frac{8}{3} \Rightarrow c = \frac{13}{3}$

Αρα $y(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{13}{3}$

Αυτο λεγεται <u>προβλημα αρχικων τιμων (Π.Α.Τ)</u>

(+) Αν εχουμε $y'(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ και θελουμε να κανουμε ορισμενη ολοκληρωση παιρνουμε ενα $t_0 \in \mathbb{R}$ και θα εχουμε

$$\int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} s^2\,ds \Rightarrow [y(s)]_{t_0}^{t} = \left[\frac{s^3}{3}\right]_{t_0}^{t} \Rightarrow$$

$$y(t) - y(t_0) = \frac{t^3}{3} - \frac{t_0^3}{3} \Rightarrow y(t) = y(t_0) + \frac{t^3 - t_0^3}{3}$$

παιρνει τιμες απο το $\left\{ \frac{t^3}{3} + c,\ c \in \mathbb{R} \right\}$

Έχουμε $y''(t)=f(t)$, $t\in I$ τότε $y'(t)=\int f(t)\,dt + c$

και $y(t)=\iint f(t)\,dt + c_0 t + c_1$ δυο παραμέτρους γιατί έχω δυο ολοκληρώσεις

π.χ **Αόριστη ολοκλήρωση**

$\underline{y''(t)=t^2}$, $t\in\mathbb{R}$

$y'(t)=\int t^2\,dt + c_0 \Rightarrow y'(t)=\dfrac{t^3}{3}+c_0$

$y(t)=\int \dfrac{t^3}{3}\,dt + c_0 + c_1 \Rightarrow y(t)=\dfrac{t^4}{3\cdot 4}+c_0 t + c_1$, $t\in\mathbb{R}$ γενική λύση

Αν θέλω συγκεκριμένη λύση σε αυτό το π.χ θα πρέπει να μου δώσει δυο πληροφορίες για να βρω τις παραμέτρους και έτσι έχω πάλι Π.Α.Τ

π.χ μπορούσε να μου δώσει $y'(1)=8$ και $y(1)=7$

τότε έχω $\begin{cases} \dfrac{1}{12}+c_0+c_1=7 \\ \dfrac{1}{3}+c_0=8 \end{cases} \Rightarrow \dots$ βρίσκω τη λύση

Μορφή $y''(t)=f(t)$

π.χ **Ορισμένη ολοκλήρωση** (SOS)

$\underline{y''(t)=f(t)}$, $t\in\mathbb{R}$, $t_0\in\mathbb{R}$

(*) Έχω στο άκρο το t άρα δε μπορώ να το χρησιμοποιήσω για αυτό επιλέγω το s.

$$\int_{t_0}^{t} y''(s)\,ds \overset{(*)}{=} \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds \Rightarrow y'(t)-y'(t_0)=\int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} y'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} y'(t_0)\,ds + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} f(u)\,du\right)ds \Rightarrow$$

$$y(t)-y(t_0)=y'(t_0)(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} f(u)\,du\right)ds \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t)=y(t_0)+y'(t_0)(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} f(u)\,du\right)ds}$$

Στη γενική περίπτωση

$$y^{(n)}(t) = f(t) \quad , \; t \in I$$

$$y(t) = \underbrace{\int\int\int \cdots \int}_{n \text{ ολοκλ.}} f(t)\,dt + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$$

→ για ένα πρόβλημα αρχ. τιμής n-τάξης θέλω n-αρχικές τιμές

Το πρόβλημα για n τάξης θα ήταν

$$y^{(n)}(t) = f(t) \quad , \; t \in I$$

$$y(t_0) = c_0$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$$

Σχόλιο :

Άλλο γενική λύση άλλο πρόβλημα αρχικών τιμών

→ $y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} f(n)\,dn\,ds$ για 2^{η} τάξη

$y(t) = \quad \dots \quad + \underbrace{\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{t_0}^{u}}_{n\text{-ολοκλ}} f(n)\,dn\;ds$ για n^{η} τάξη

(κατά παράγοντες)

Άσκηση

Να δείξω ότι $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \cdots \int_{t_0}^{u} f(r)\,dr \dots dn\,ds = \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} \cdot f(s)\,ds$

Πχ Αόριστο ολοκλήρωμα

Μορφή $y'(t)=\kappa y(t)$

$y'(t) = \kappa y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, κ σταθερά

$\frac{y'(t)}{y(t)} = \kappa \Rightarrow \int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \kappa \Rightarrow \ln|y(t)| = \kappa t + c_0 \Rightarrow$

$|y(t)| = e^{\kappa t + c_0}$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow |y(t_0)| = e^{c_0} \cdot e^{\kappa t}$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow |y(t)| = c \cdot e^{\kappa t}$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \pm y(t) = c \cdot e^{\kappa t}$, $t \in \mathbb{R}$

Πολλές φορές βάζω $e^{c_0} = c$ σταθερά

Πχ Αόριστο ολοκλήρωμα $\rightarrow$ συνάρτηση

Μορφή $y'(t)+p(t)y(t)=0$

$y'(t) + \kappa y(t) = 0$ ή $y'(t) + p(t)y(t) = 0$, $t \in I$

$\Rightarrow \frac{y'(t)}{y(t)} = -p(t) \quad (y(t) \neq 0) \Rightarrow \ln|y(t)| = -\int p(t)\,dt + c_1$

$\Rightarrow |y(t)| = e^{-\int p(t)\,dt + c_1} \Rightarrow y(t) = c \cdot e^{-\int p(t)\,dt}$ με $c = e^{c_1}$

$\hookrightarrow \underbrace{e^{c_1}}_{=c} \cdot e^{-\int p(t) dt}$

Στη μορφή $y'(t)=\kappa y(t) \Rightarrow y(t) = ce^{\kappa t}$ δεν έχω ολοκλήρωμα γιατί το κ σταθερά άρα μπορώ να το βγάλω όμως αλλιώς περίπτωση έχω ολοκλήρωμα γιατί δε ξέρω τη συνάρτηση

* Ορισμένο ολοκλήρωμα

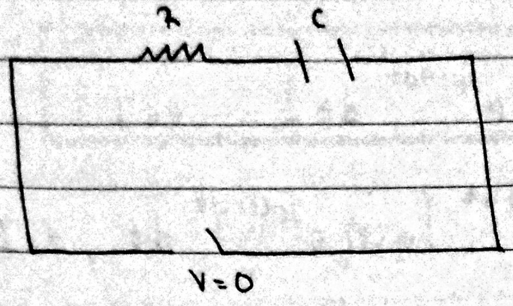
$\int_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{y(s)} ds = -\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds \Rightarrow \left[\ln|y(s)| \right]_{s=t_0}^{s=t} = -\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds$

$\Rightarrow \ln y(t) - \ln y(t_0) = -\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds \Rightarrow \ln y(t) = \ln y(t_0) - \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds \Rightarrow$

$e^{\ln y(t)} = e^{\ln y(t_0) - \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \Rightarrow y(t) = y(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} \Rightarrow$

$y(t) = c \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}$ με $c = y(t_0)$

Π.χ.



Τάση : $E_R = R \cdot I = R \cdot \frac{dQ(t)}{dt}$

$E_C = \frac{Q(t)}{C}$

Έχουμε $R\,Q'(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \Rightarrow R \cdot C \cdot Q'(t) + Q = 0 \Rightarrow$

$Q'(t) + \frac{1}{RC} Q(t) = 0$ Ανάγεται στη μορφή $y'(t) = \kappa \cdot y(t) \Rightarrow y(t) = c \cdot e^{\kappa t}$

για $t=0$: $Q(0) = Q_0$

$Q(t) = \underbrace{Q(0)}_{Q_0} e^{-t/RC}$

Το Q_0 εδώ παριστάνει το $C = e^{c_0}$ δηλ. το σταθερό ολοκλήρωμα μου

$y'(t) + p(t)\,y(t) = q(t)$ Γραμμική Διαφ. Εξ. α' τάξης

Μορφή $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$

$y(t) = c\,e^{\int p(t)\,dt}$

$$\left\{ y'(t)\,e^{\int p(t)\,dt} + p(t)\,e^{\int p(t)\,dt}\,y(t) = 0 = \left[y(t)\,e^{\int p(t)\,dt} \right]' \right\}$$ παρενθέση

$y'(t) + p(t)\,y(t) = q(t)$

$$\underbrace{e^{\int p(t)\,dt}\,y'(t) + p(t)\,y(t)\,e^{\int p(t)\,dt}} = q(t)\,e^{\int p(t)\,dt}$$

$$\left[y(t)\,e^{\int p(t)\,dt} \right]' = q(t)\,e^{\int p(t)\,dt}$$

$$y(t)\, e^{\int p(t)\,dt} = c + \int q(t)\, e^{\int p(t)\,dt}\, dt$$

$$\boxed{y(t) = e^{-\int p(t)\,dt}\left[c + \int q(t)\, e^{\int p(t)\,dt}\, dt\right] \quad t\in I}$$

ή $$y(t) = c e^{-\int p(t)\,dt} + e^{-\int p(t)\,dt}\int q(t)\, e^{\int p(t)\,dt}\, dt \,, \quad t\in I$$

<u>π.χ</u>

$$y'(t) + 2t\, y(t) = 3 \,, \quad t\in\mathbb{R}$$

$p(t) = 2t$, $q(t) = 3$.

$$\left[e^{\int 2t\,dt}\, y(t)\right]' = e^{\int 2t\,dt}\cdot 3 \Rightarrow \left[e^{t^2} y(t)\right]' = 3e^{t^2} \Rightarrow$$

$$e^{t^2} y(t) = c + \int 3e^{t^2}\,dt \Rightarrow y(t) = ce^{-t^2} + e^{-t^2}\left[c + 3\int e^{t^2}\,dt\right]$$

$$\Rightarrow e^{t^2} y(t) = c + \int 3e^{t^2}\,dt \Rightarrow y(t) = ce^{-t^2} + e^{-t^2}\cdot 3\int e^{t^2}\,dt$$

Αν έχω αρχική τιμή $y(1) = 7$ — Αόριστη ολοκλήρωση

$t = 1 \Rightarrow 7 = ce^{-1} + e^{-1}\cdot 3\left[\int e^{t^2}\,dt\right]_{t=1}$

Ορισμένη ολοκλήρωση — Δεν κάνω αντικατάσταση

$$\int_1^t \left[e^{s^2} y(s)\right]' ds = 3\int_1^t e^{s^2}\, ds \Rightarrow \left[e^{s^2} y(s)\right]_{s=1}^{s=t} = 3\int_1^t e^{s^2}\, ds$$

$$e^{t^2} y(t) - e^{1} y(1) = 3\int_1^t e^{s^2}\,ds \Rightarrow y(t) = e^{-t^2}\left[7e + 3\int_1^t e^{s^2}\,ds\right]$$

$$\Rightarrow y(t) = 7e^{-t^2} e + 3\int_1^t e^{s^2}\cdot e^{-t^2}\,ds \Rightarrow y(t) = 7e^{1-t^2} + 3\int_1^t e^{s^2 - t^2}\,ds$$

Τυπος

$$y'(t)+p(t)\,y(t)=q(t) \Rightarrow y(t)=e^{-\int p(t)dt}\left[c+\int q(t)\,e^{\int p(t)dt}\,dt\right]$$

$t_0 \in I$,

$$y(t)=e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}\left[y(t_0)+\int_{t_0}^{t} q(s)\,e^{\int_{t_0}^{s} p(n)\,dn}\,ds\right] \quad \text{ΠΑΤ } y(t_0)=y_0$$

$$\boxed{y(t)=y_0\,e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds}+\int_{t_0}^{t} q(s)\,\underbrace{e^{-\int_{t_0}^{t} p(n)\,dn}\;e^{\int_{t_0}^{s} p(n)\,dn}}_{e^{-\int_{s}^{t} p(n)\,dn}}\,ds}$$

Παραδειγμα

μας βοηθαει να επιλεξουμε το διαστημα που θα δουλεψω

$xy'-2y=-x^2$, $y(1)=0$ ειναι της μορφης $a(t)y'(t)+b(t)\,y(t)=f(t)$, $t\in I$

θελω $a(t)\neq 0$, $\forall t\in I$ διαιρω με $a(t)$: $y'(t)+\frac{b(t)}{a(t)}y(t)=\frac{f(t)}{a(t)}$, $t\in I$

Δουλευω για $x>0$ $\leftarrow \left\{ \begin{matrix} (0,+\infty) \\ (-\infty,0) \end{matrix} \right\}$

$x\in(0,+\infty)$: $y'-\frac{2}{x}y=-x$, $y(1)=0$

$$y(x)=e^{-\int_1^x\left(-\frac{2}{s}\right)ds}\cdot\left[y(1)+\int_1^x(-s)\,e^{\int_1^s\left(-\frac{2}{u}\right)du}\,ds\right]=, \quad x>0$$

$$=e^{2\int_1^x \frac{1}{s}ds}\left[0-\int_1^x s\,e^{-2\int_1^s \frac{1}{u}du}\,ds\right] \Rightarrow$$

$$y(x)=-e^{2[\ln s]_1^x}\cdot\int_1^x s\,e^{-2[\ln u]_1^s}\,ds \Rightarrow$$

$$y(x)=-e^{2\ln x}\int_1^x s\,e^{-2\ln s}\,ds \Rightarrow y(x)=-x^2\cdot\int_1^x s\cdot s^{-2}\,ds \Rightarrow$$

$$y(x)=-x^2\int_1^x s^{-1}\,ds \Rightarrow y(x)=-x^2\,[\ln s]_1^x \Rightarrow$$

$$y(x)=-x^2\ln x, \quad x>0$$

$\ln 1=0$

$e^{\ln x}=x$

Φυλλάδιο Α-3 (E-book 1)

$y' + by = \sin(ax)$ $b, a \in \mathbb{R}$, $ba \neq 0$

1) Να επιλυθεί η εξίσωση

2) Αν $b > 0$ και y μια λύση να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο

$\lim_{x \to +\infty} y(x)$

Λύση

(1) $y(x) = e^{-\int_0^x b\,ds} \left[y(0) + \int_0^x \sin(as)\, e^{\int_0^s b\,ds} ds \right]$

$y(x) = e^{-bx} y(0) + e^{-bx} \left[\int_0^x \sin(as)\, e^{bs} ds \right]$ $x \in \mathbb{R}$

$y(x) = e^{-bx} c + e^{-bx} \int \sin(ax)\, e^{bs} ds$

$y(x) = ce^{-bx} + \frac{1}{a^2+b^2} [b\sin ax - a\cos ax]$

(2) $\lim_{t \to \infty} f(t)$ | $x_v \to \infty$, $y_v \to \infty$

$ax_v = 2v\pi + \frac{\pi}{2}$, $ay_v = 2v\pi$

$x_v = \frac{2v\pi + \frac{\pi}{2}}{a}$, $y_v = \frac{2v\pi}{a}$

$\lim_{v \to \infty} x_v = +\infty$, $\lim_{v \to \infty} y(y_v) = 0 - \frac{a}{a^2+b^2}$

$\lim_{v \to \infty} y(x_v) = 0 + \frac{b}{a^2+b^2} \cdot 1$

Η εξίσωση θα είναι της μορφής $y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$ με

$p(t) = b$ (σταθερά) και $q(t) = \sin(at)$

Θυμάμαι

$$\kappa \sin x + \lambda \cos x = \sqrt{\kappa^2+\lambda^2}\left[\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\sin x + \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\cos x\right] =$$

$$= \sqrt{\kappa^2+\lambda^2}\left[\cos\theta \sin x + \sin\theta \cos x\right] = \sqrt{\kappa^2+\lambda^2}\sin(x+\theta)$$

$$\rightarrow y(x) = c e^{-bx} + \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\theta + ax)$$

Π.χ.

$y(x) = 2\sin x + 3\cos x$ Τι τιμές παίρνει, θετικές, αρνητικές?

$$y(x) = \sqrt{2^2+3^2}\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}\sin x + \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}\cos x\right] =$$

$$(\ )+(\ ) = 1$$

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}}, \quad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$$= \sqrt{3^2+2^2}\left[\cos\theta \sin x + \sin\theta \cos x\right] = \sqrt{13}\sin(x+\theta)$$

Πέμπτη - Παρασκευή θα βγουν οι ασκήσεις στη σελίδα του, να τις πάμε Δευτέρα 9ου

Τεστ: 10%

Τ1: 30 Οκτ

Τ2: 20 Νοεμ

Τ3: 18 Δεκ